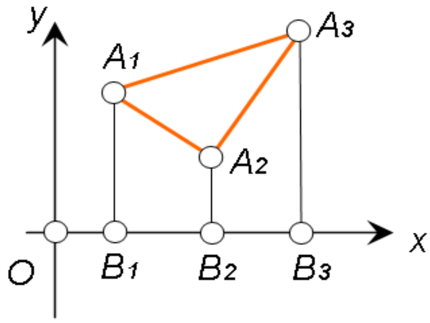
Пример

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$.

Решение

Пусть треугольник расположен в координатах xy так, как показано на рис.



В этом расположении треугольника его площадь равна разности между площадью трапеции $B_1A_1A_3B_3$ и суммой площадей трапеций $B_1A_1A_2B_2$ и $B_2A_1A_2B_2$. Основания трапеции $B_1A_1A_3B_3$ равны y_1 и y_3, а ее высота $x_3 - x_1$.

Поэтому площадь трапеции:

$$S(B_1A_1A_3B_3) = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1).$$

Аналогично находим площади двух других трапеций:

$$S(B_1A_1A_2B_2) = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1),$$

$$S(B_2A_2A_3B_3) = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2).$$

Площадь треугольника $A_1A_2A_3$:

$$S(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) -$$
$$- \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(x_2y_3 - y_3x_1 + x_1y_2 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_1x_2)$$

Этой формуле можно придать более удобную для запоминания форму:

$$S(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}((y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))$$

Хотя формула для площади треугольника выведена для специального расположения треугольника относительно системы координат, она дает правильный с точностью до знака результат и для любого его расположения.